

УДК 621.77.4:621.762.4

Шестаков Н. А.  
Субич В. Н.  
Демин В. А.  
Лысюк М. В.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ПЛОТНОСТИ СЖИМАЕМЫХ МАТЕРИАЛОВ

Анализ пластического течения пористых материалов (порошковых, гранулированных и т. п.) проводят на основе определяющих соотношений для сжимаемых материалов, полученных с использованием поверхности нагружения вида [1]:

$$\alpha\sigma_u^2 + \beta\sigma^2 = \sigma_{sn}^2 = \delta\sigma_s^2, \quad (1)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\delta$  – функции относительной плотности  $p$  (одна из трех несущественная);  $p = 1 - V_n/V$  и других характеристик материала и процесса деформирования (температуры и т. д.);

$V_n$  – объем пор в пористой заготовке;  $V$  – объем пористой заготовки;

$\sigma_u = \sqrt{(3/2)s_{ij}s_{ij}}$  – интенсивность напряжений;

$s_{ij}$  – компоненты девиатора напряжений;

$\sigma = \sigma_{ii}/3$  – среднее напряжение (гидростатическое давление);

$\sigma_s$ ,  $\sigma_{sn}$  – соответственно напряжения текучести материала основы и пористого тела.

Ассоциированный с (1) закон течения дает зависимости между деформациями и напряжениями при пластическом течении ПМ в виде:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = 3\dot{\lambda}[\alpha s_{ij} + 2\beta\sigma\delta_{ij}/9]; \quad (2)$$

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_{ii} = 2\dot{\lambda}\beta\sigma; \quad (3)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_v\delta_{ij}/3 = 3\dot{\lambda}\alpha s_{ij}; \quad (4)$$

$$\dot{\lambda} = \dot{\bar{\epsilon}}_u/2\bar{\sigma}_u, \quad (5)$$

где  $\dot{\epsilon}_{ij}$  и  $\dot{\epsilon}_{ij}$  – компоненты тензора и девиатора скоростей деформации;

$\dot{\bar{\epsilon}}_u = \sqrt{\dot{\epsilon}_u^2/\alpha + \dot{\epsilon}_v^2/\beta}$  – интенсивность приведенных скоростей деформаций ПМ;

$\dot{\epsilon}_u = \sqrt{2\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}/3}$  – интенсивность скоростей деформаций;

$\dot{\epsilon}_v$  – скорость объемной деформации;

$\bar{\sigma}_u = \sqrt{\alpha\sigma_u^2 + \beta\sigma^2}$  – интенсивность приведенных напряжений.

Приведенные соотношения теории пластичности сжимаемых материалов показывают, что одним из ключевых вопросов теории пластичности изотропного сжимаемого материала, является определение функций  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\delta$  (одна из трех несущественная). Из (1) следует:

$$\sigma_{mn}^o = \sigma_s \sqrt{\frac{\delta}{\alpha}} = \frac{\sigma_{sn}}{\sqrt{\alpha}}; \quad \sigma_c^o = \sigma_s \sqrt{\frac{\delta}{\beta}} = \frac{\sigma_{sn}}{\sqrt{\beta}}, \quad (6)$$

где  $\sigma_{mn}^o$ ,  $\sigma_c^o$  – величины полуосей эллипсоида (1) в плоскости  $\sigma_u - \sigma$ .

Как видно из (6) функции  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\delta$  определяют полуоси эллипсоидной предельной поверхности и соотношение между полуосями в процессе деформации, а, следовательно, определяют упрочнение пористого материала вплоть до его беспористого состояния. Для определения  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\delta$  необходимо произвести два независимых эксперимента, так как на любой стадии деформирования предельная поверхность эллипсоидного типа (1) определяется единственным образом по двум известным точкам. В идеальном случае это должно быть испытание на чистый сдвиг ( $\sigma = 0$ ) и всестороннее равномерное сжатие ( $\sigma_{ii} = 0$ ). Оба этих испытания на практике не применяются: первое из-за малой пластичности пористого материала, а второе – из-за отсутствия соответствующего оборудования. Более того, как правило, определение функций  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\delta$  осуществляется на основании одного вида испытаний – на одноосное сжатие цилиндрических образцов плоскими плитами, что некорректно.

Определение функций плотности по результатам испытания на осевое сжатие осуществляется следующим образом [2]. Так как  $\sigma_p = \sigma_\varphi = 0$ ,  $\sigma_z = -q$ , то:

$$\sigma_u = q; \quad \sigma = -q/3; \quad s_p = s_\varphi = q/3; \quad s_z = -2q/3. \quad (7)$$

Осуществляя ступенчатое нагружение, в результате эксперимента определяют величины осевого давления  $q$ , плотности  $p$  и коэффициента поперечной деформации  $\mu_p = -de_p / de_z$ .

Подставляя (7) в (2), получают формулу, связывающую коэффициент поперечной деформации  $\mu_p$  с функциями плотности при осевом сжатии:

$$\mu_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{(9\alpha - 2\beta)}{(9\alpha + \beta)}. \quad (8)$$

Подставляя величины  $\sigma_{ii}$  и  $\sigma$  из (7) в (1), получают второе уравнение, связывающее функции плотности между собой:  $9\alpha + \beta = 9$ , которое совместно с (8) дает искомые функции:

$$\alpha = 2(\mu_p + 1)/3; \quad \beta = 3(1 - 2\mu_p); \quad \delta = \sigma_{sn}^2 / \sigma_s^2; \quad \sigma_{sn} = q. \quad (9)$$

По существу эллипс в плоскости  $\sigma_{ii} - \sigma$ , описываемый уравнением (1) по результатам испытания только на осевое сжатие, строится по точке, определяемой концом вектора с координатами  $\sigma_{ii} = q$  и  $\sigma = -q/3$ . Однако точка с такими координатами может принадлежать бесчисленному количеству эллипсов в плоскости  $\sigma_{ii} - \sigma$ .

Целью данной работы является уточнение методики экспериментального определения функций плотности и ее апробация на основе физических и виртуальных экспериментальных работ.

Корректная методика определения функций плотности может быть реализована на основе использования двух видов доступных испытаний: одноосного сжатия цилиндрических образцов плоскими плитами и сжатия призматических образцов в условиях плоской деформации.

Испытание на сжатие в условиях плоской деформации можно произвести, если образец в виде параллелепипеда с размерами  $h \cdot \ell \cdot b$  осаживать ступенчато между двумя жестко установленными гладкими плитами (рис. 1).

Путем измерения размеров деформируемого образца и гидростатического взвешивания после каждой ступени нагружения может быть получена необходимая информация для расчета приращений деформации и текущих относительной плотности  $p$  и пористости  $v$ :

$$de_z = \ln(h/h_0); \quad de_x = \ln(\ell/\ell_0); \quad e_y = 0; \quad p = 1 - v, \quad (10)$$

где  $h$ ,  $h_0$ ,  $\ell$ ,  $\ell_0$  – текущая и начальная высота и длина параллелепипеда; размер  $b$  (ширина) остается неизменным, т. к.  $e_y = 0$ .

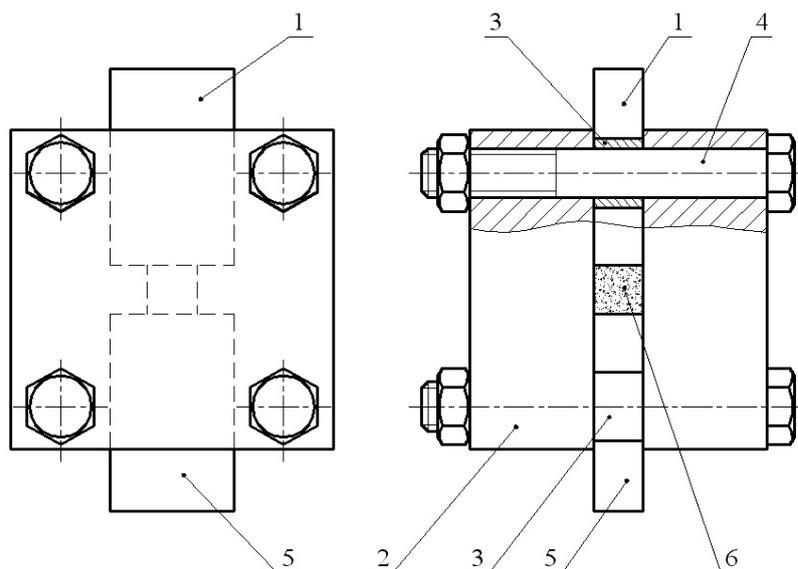


Рис. 1. Эскиз штампа для испытания образцов из спеченных порошков на сжатие в условиях плоской деформации:

1 – верхний пуансон; 2 – боковая плита; 3 – дистанционная втулка; 4 – стяжной болт; 5 – нижний пуансон

В процессе каждой ступени нагружения фиксируется также сила  $P$ , соответствующая началу пластического течения. В результате, на основании экспериментальных данных, рассчитываются зависимости: давления от текущей плотности –  $q_{\text{пл}}(p) = P(p) / h l$ ; давления от степени деформации –  $q_{\text{пл}} = q_{\text{пл}}(\varepsilon_0) = \sigma_{\text{сп}}^*(\varepsilon_0)$ ; плотности от степени деформации:  $p = p(\varepsilon_0)$ .

Давление, соответствующее началу пластического течения сжимаемого материала в условиях однородной плоской деформации по аналогии с общепринятым обозначением в теории обработки металлов давлением несжимаемых материалов, обозначено через  $\sigma_{\text{сп}}^*$ .

Формулы (10) дают возможность рассчитать по экспериментальным данным зависимость коэффициента поперечной деформации от плотности:

$$\mu'_p(p) = -de_x(p) / de_z(p). \quad (11)$$

Для рассматриваемого случая соотношения (2) в приращениях примут вид:

$$de_x = 3d\lambda \left[ \alpha s_x + \frac{2}{9} \beta \sigma \right]; de_y = 3d\lambda \left[ \alpha s_y + \frac{2}{9} \beta \sigma \right]; de_z = 3d\lambda \left[ \alpha s_z + \frac{2}{9} \beta \sigma \right]. \quad (12)$$

Тогда из (11) и (12), имеем:

$$\mu'_p(p) = -\frac{de_x}{de_z} = -\frac{9\alpha s_x + 2\beta\sigma}{9\alpha s_z + 2\beta\sigma}. \quad (13)$$

Из второго уравнения (12) при  $de_y = 0$  следует:

$$\sigma = -9\alpha s_y / 2\beta. \quad (14)$$

Учитывая, что  $\sigma_x = 0$ , тогда  $3\sigma = \sigma_y + \sigma_z = s_y + s_z + 2\sigma$ , откуда имеем:

$$\sigma = s_y + s_z. \quad (15)$$

Приравнявая (14) и (15), а также, учитывая, что  $s_x + s_y + s_z = 0$ , получаем:

$$s_x = -\frac{9\alpha s_z}{9\alpha + 2\beta}; s_y = -\frac{2\beta s_z}{9\alpha + 2\beta}. \quad (16)$$

Выразим величину  $s_z$  через экспериментальную функцию  $q_{пл} = q_{пл}(p)$ . Для этого запишем выражение для  $\sigma_z = -q_{пл}$  с учетом (14) в виде:  $\sigma_z = s_z - 9\alpha s_y / 2\beta$ , откуда, подставляя первое соотношение (16), получаем:

$$s_z = -\frac{q_{пл}}{2} \cdot \frac{9\alpha + 2\beta}{9\alpha + \beta}. \quad (17)$$

Соотношение (17) позволяет выразить и другие компоненты девиатора напряжений (16) через экспериментальную функцию  $q_{пл} = q_{пл}(p)$ :

$$s_x = \frac{q_{пл}}{2} \cdot \frac{9\alpha}{9\alpha + \beta}; \quad s_y = \frac{\beta q_{пл}}{9\alpha + \beta}. \quad (18)$$

Подставляя (14), (17) и (18) в (13), получаем формулу, связывающую экспериментальную функцию  $\mu'_p$  с функциями плотности при испытании на осадку в условиях плоской деформации:

$$\mu'_p = -\frac{(9\alpha - 2\beta)}{(9\alpha + 4\beta)}. \quad (19)$$

Из (8) и (19) находим  $\beta$ , а из (1) полагая  $\sigma_{sn} \approx q$  с учетом (7) находим  $\alpha$ :

$$\beta = \frac{3(2\mu_p - \mu'_p)}{\mu'_p}; \quad \alpha = \frac{2(2\mu'_p - \mu_p)}{3\mu'_p}. \quad (20)$$

Изложенная методика была апробирована на результатах физических и виртуальных экспериментов.

Физические эксперименты были проведены с использованием медного порошка марки ПМС-Н. Из порошка были получены брикеты, плотность которых после спекания составила: 0,78; 0,83. Из брикетов вырезались образцы в виде кубиков с размерами:  $18 \times 18 \times 18$  мм. Все грани кубиков подвергались шлифованию в размер. Для испытания на сжатие в условиях плоской деформации использовался штамп, эскиз которого показан на рис. 1.

Деформацию производили на прессе Instron 1255, обеспечивающем точность измерения хода ползуна  $\pm 0,01$  мм и точность измерения силы деформации  $\pm 2$  %. Деформация всех партий образцов производилась ступенчато с промежуточными разгрузками для измерения текущих размеров и плотности. Плотность определялась гидростатическим взвешиванием. Для уменьшения влияния сил трения применялись полиэтиленовые прокладки и смазка литол. Шаг изменения степени деформации составлял 0,02...0,04. Испытания прекращали после образования магистральных трещин, приводящих к нарушению целостности образцов.

Далее по методике, описанной в [3] были проведены виртуальные эксперименты по осадке конечно-элементных (КЭ) моделей представительных объемов в условиях одноосного сжатия и сжатия в условиях плоской деформации, для тех же начальных относительных плотностей  $p_n = 0,78$  и  $p_n = 0,83$ . Для этого выбрана прямоугольная двумерная область размером  $100 \times 50$  КЭ. Из них для  $p_n = 0,78$  количеству КЭ равному  $0,78 \times 100 \times 50$  присвоены свойства материала основы, а количество КЭ равное  $0,22 \times 100 \times 50$  случайным образом удалено. Для  $p_n = 0,83$  количеству КЭ равному  $0,83 \times 100 \times 50$  присвоены свойства материала основы, количество КЭ равное  $0,17 \times 100 \times 50$ , также случайным образом удалено. Свойства материала основы для виртуального эксперимента задавались функцией  $\sigma_s = 435 \varepsilon_0^{0,15}$ .

Сопоставление результатов физического и виртуального экспериментов производилось для двух видов испытаний по величине погрешности при расчете текущих давлений осадки пористого материала  $q$  и  $q_{пл}$  и коэффициентов поперечной деформации  $\mu_p$  и  $\mu'_p$  соответственно при осевом сжатии и сжатии в условиях плоской деформации. Результаты сопоставления показаны на рис. 2 и 3.

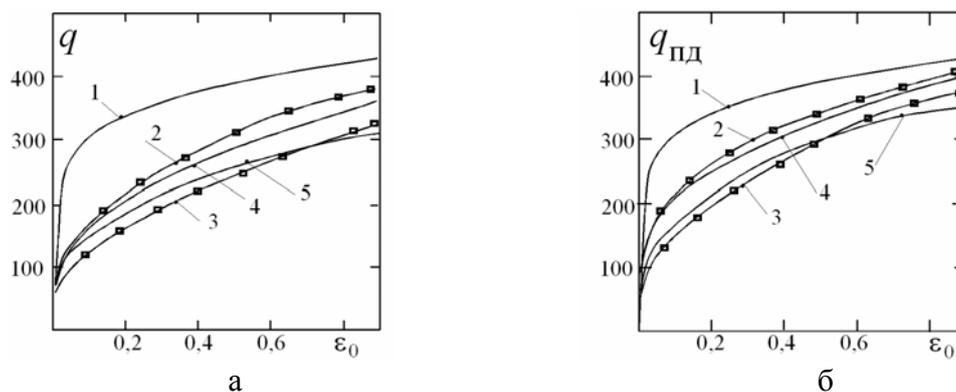


Рис. 2. Зависимости давления осадки образцов из пористой меди  $\sigma_{sn}$  от степени деформации  $\varepsilon_0$  при одноосном сжатии (а) и плоской деформации (б), полученные в результате физического эксперимента (кривые 2, 3) и виртуального эксперимента (кривые 4, 5):

1 – кривая упрочнения материала основы; 2 –  $p_n = 0,83$ ; 3 –  $p_n = 0,78$ ; 4 –  $p_n = 0,83$ ; 5 –  $p_n = 0,78$

На рис. 2 приведены экспериментальные зависимости  $q$  и  $q_{плд}$  от степени деформации  $\varepsilon_0$  (кривые 2, 3), и аналогичные зависимости по результатам виртуального эксперимента (кривые 3, 4), полученные при испытании спеченных образцов из медного порошка с различной начальной плотностью на одноосное сжатие (рис. 2, а) и сжатие в условиях плоской деформации (рис. 2, б).

На рис. 3 приведены экспериментальные зависимости  $\mu_p$  и  $\mu'_p$  от текущей плотности  $p$  (кривые 1, 3), и аналогичные зависимости по результатам виртуального эксперимента (кривые 2, 3), полученные при испытании спеченных образцов из медного порошка с различной начальной плотностью на одноосное сжатие и сжатие в условиях плоской деформации.

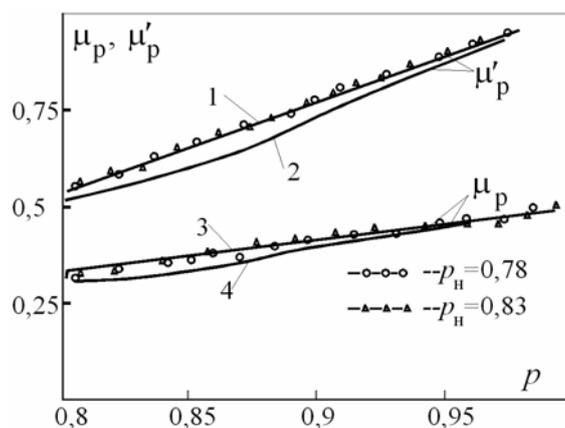


Рис. 3. Зависимости коэффициентов поперечной деформации  $\mu_p$  и  $\mu'_p$  при осевом сжатии (кривые 3, 4) и сжатии в условиях плоской деформации (кривые 1, 2) образцов из пористой меди от плотности, полученные в результате физического эксперимента (кривые 1, 3) и виртуального эксперимента (кривые 2, 4)

Приведенные на рис. 3 экспериментальные данные показывают, что на зависимости коэффициентов поперечной деформации  $\mu_p$  и  $\mu'_p$  от плотности практически не оказывает влияния начальная плотность. На рис. 3 кружочки соответствуют плотности  $p_n = 0,78$ , а треугольники –  $p_n = 0,83$ . Поэтому данные физического эксперимента аппроксимированы линейной зависимостью. С использованием экспериментальных зависимостей произведен расчет функций плотности двумя способами: по формулам (9) и по формулам (20), полученным в соответствии с уточненной методикой (рис. 4).

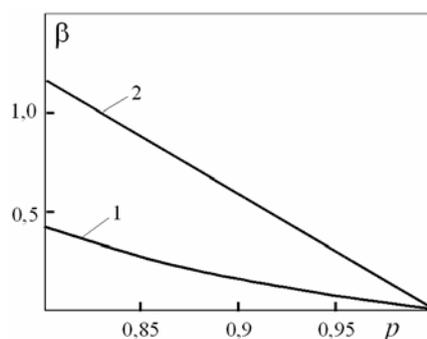


Рис. 4. Результаты расчета функций плотности (1 – по формулам (20); 2 – по формулам (9))

Результаты расчета показывают, что рассчитанные по уточненной методике зависимости  $\alpha(p)$  и  $\beta(p)$  отличаются от результатов их определения по одному виду испытаний – одноосному сжатию. Причем уточненные зависимости показывают более значительный вклад в уплотнение пористого тела сдвигового механизма уплотнения.

### ВЫВОДЫ

Разработана уточненная методика экспериментальных исследований функций плотности эллипсоидального условия пластичности пористых материалов, основанная на использовании результатов испытания пористых материалов при двух видах испытаний: одноосное сжатие и сжатие образцов в условиях плоской деформации.

Проведена апробация новой методики определения функций плотности на основе физических и виртуальных экспериментальных работ, а также сравнение результатов их определения по традиционной методике. Полученные данные свидетельствующие о значительной разнице между функциями плотности при их определении по новой и традиционной методике.

Приведены новые данные, подтверждающие адекватность моделирования механических и реологических свойств пористых материалов путем проведения виртуальных экспериментальных работ на основе КЭ-модели представительного объема (материальной точки) пористого тела со случайно распределенными прямоугольными пустыми КЭ-элементами, имитирующими свойства пор.

Работа выполнялась в соответствии с Федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., мероприятие 1.2.1 (ГК № 1123).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Грин Р. Дж. Теория пластичности пористых тел / Р. Дж. Грин // *Механика*. – 1973. – № 4. – С. 109–120.
2. *Прогрессивные технологические процессы штамповки деталей из порошков и оборудование* / Г. М. Волкогон, А. М. Дмитриев, Е. П. Добряков и др.; под общ. ред. А. М. Дмитриева, А. Г. Овчинникова. – М.: Машиностроение, 1991. – 320 с.
3. Шестаков Н. А. Расчетный метод построения истинных кривых упрочнения пористых и композиционных материалов / Н. А. Шестаков, В. Н. Субич, Д. А. Власов // *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением*. – 2010. – № 10. – С. 15–20.

Шестаков Н. А. – д-р техн. наук, проф. МГИУ;

Субич В. Н. – д-р техн. наук, проф., зав кафедрой МГИУ;

Демин В. А. – д-р техн. наук, проф., ректор МГИУ;

Лысюк М. В. – студент МГИУ.

МГИУ – Московский государственный индустриальный университет, г. Москва, Россия.

E-mail: shes-v@mail.msiu.ru

shes48@yandex.ru